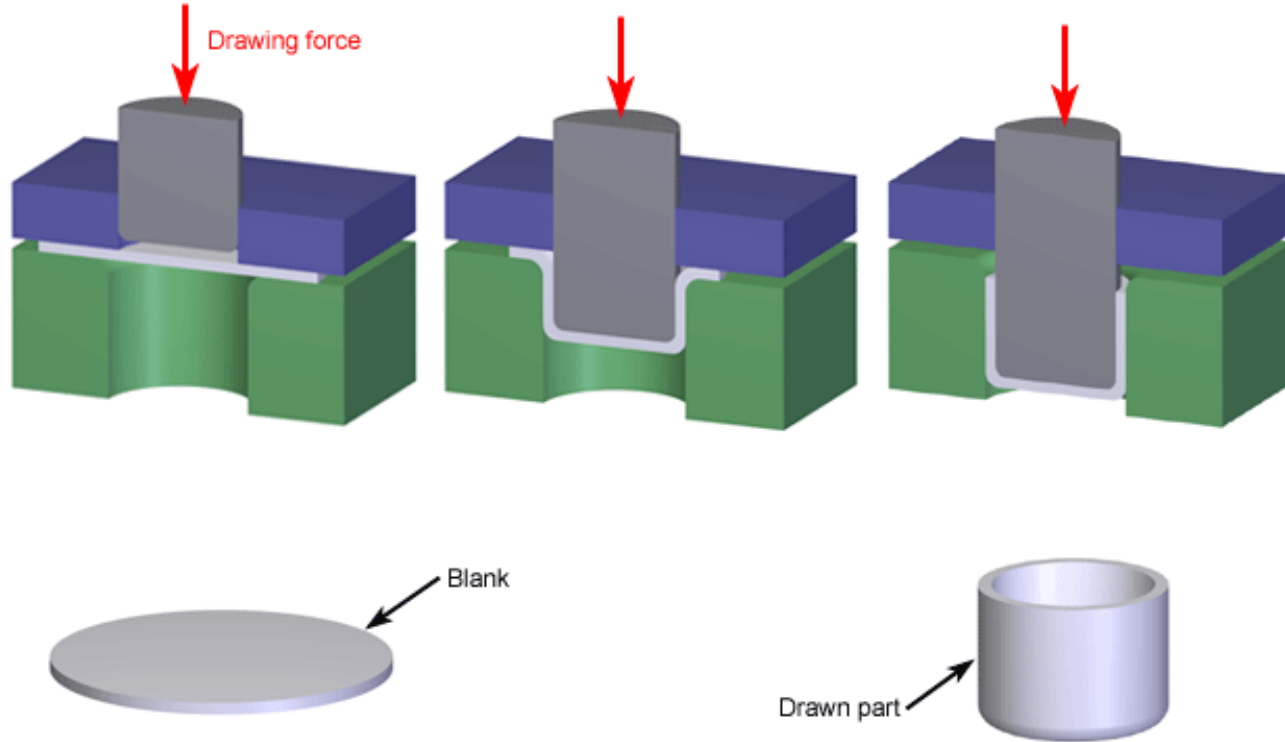
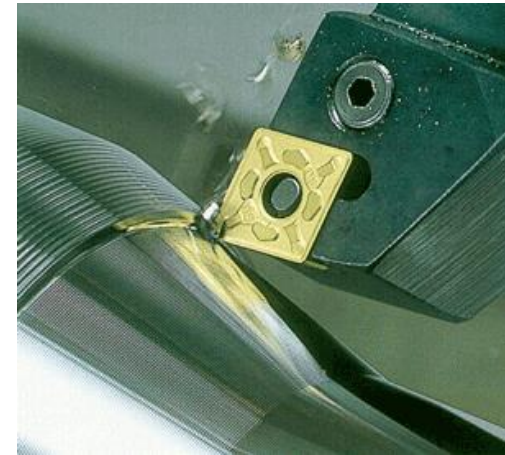


3 장. 소성 변형 거동 (Plastic Deformation Behavior)



Deep drawing



절삭가공

소성이론 (Theory of plasticity)

- 항복점 이후의 재료거동 (Dealing with the behavior of materials beyond yield point)
- 회복 불가능 과정 (Non recoverable process)
- 하중방향에 따름 (Depending on the loading path) – Bauschinger's effect.
- 보통 가공경화 수반 (Normally accommodated by strain hardening)

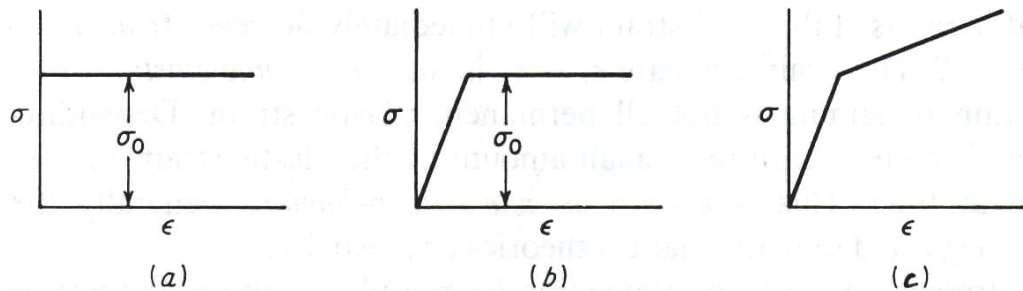


Figure 3-2 Idealized flow curves. (a) Rigid ideal plastic material; (b) ideal plastic material with elastic region; (c) piecewise linear (strain-hardening) material.

1. Flow curve (True stress-strain curve)

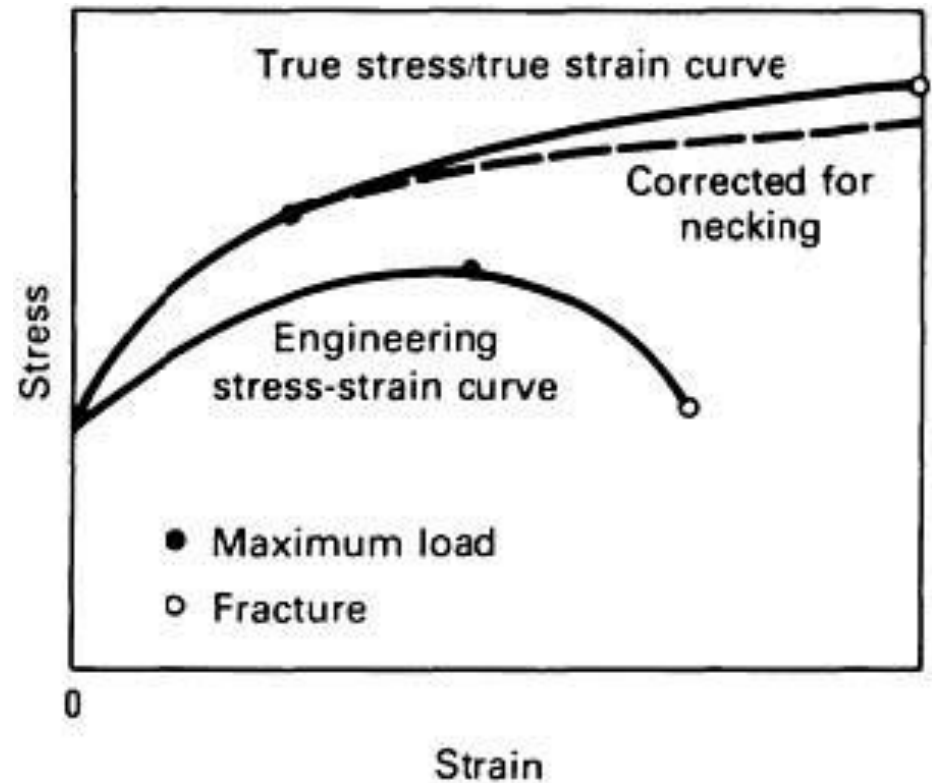
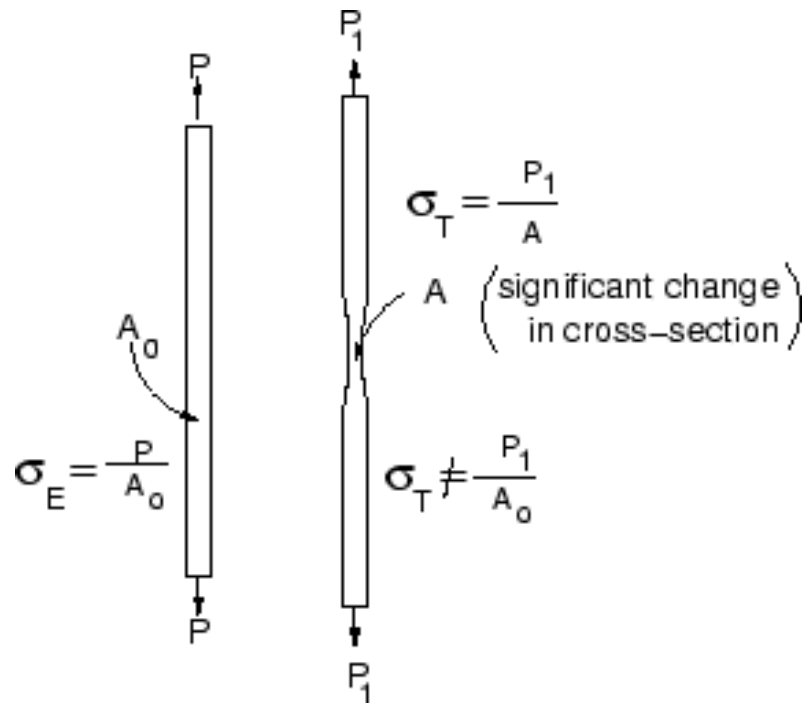
(1) 변형율(strain) :

$$e = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{1}{L_0} \int_{L_0}^L dL$$

$$\varepsilon = \sum \frac{L_1 - L_0}{L_0} + \frac{L_2 - L_1}{L_1} + \frac{L_3 - L_2}{L_2} + \dots$$

$$\varepsilon = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0}$$

$$\varepsilon = \ln \frac{L}{L_0} = \ln(e + 1)$$



σ =진응력(true stress) = $P/A=S(1+e)$, where A =순간 단면적

ϵ =진변형율(true strain) = $\ln(L/L_0)=\ln(1+e)$

(2) 응력(stress)

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0} \cdot \frac{A_0}{A} = S \cdot \frac{L}{L_0} = S(e+1)$$

$$\sigma > S$$

$$\varepsilon < e$$



(예) $\rightarrow L_0(50\text{mm})$ 를 각각 10%씩 3번 인장할 경우
(50mm $\rightarrow$ 55mm $\rightarrow$ 60.5mm $\rightarrow$ 66.5mm)

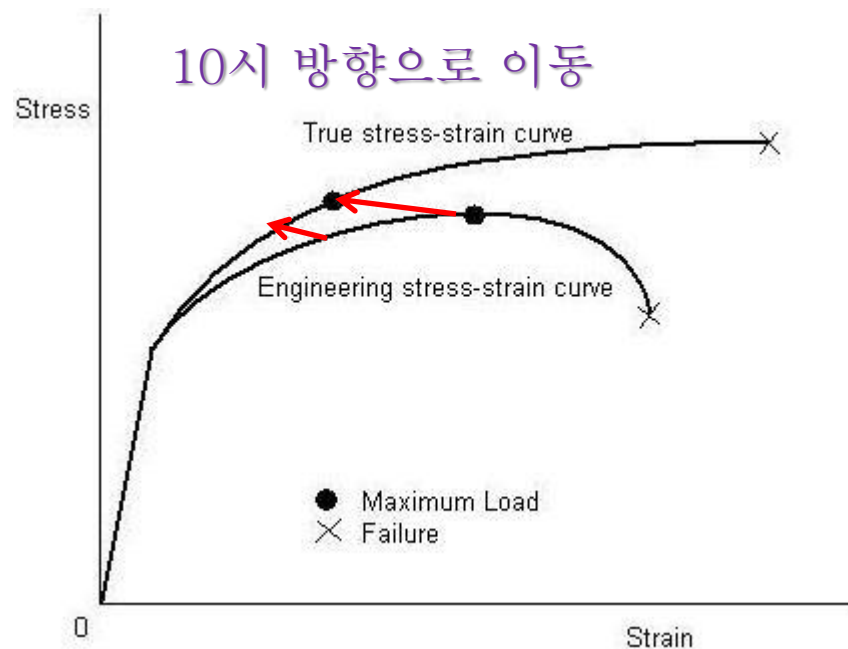
$$e_{0-1} + e_{1-2} + e_{2-3} = 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.3$$

$$e_{0-3} = \frac{66.5}{50} = 0.331$$

서로 다른 결과!

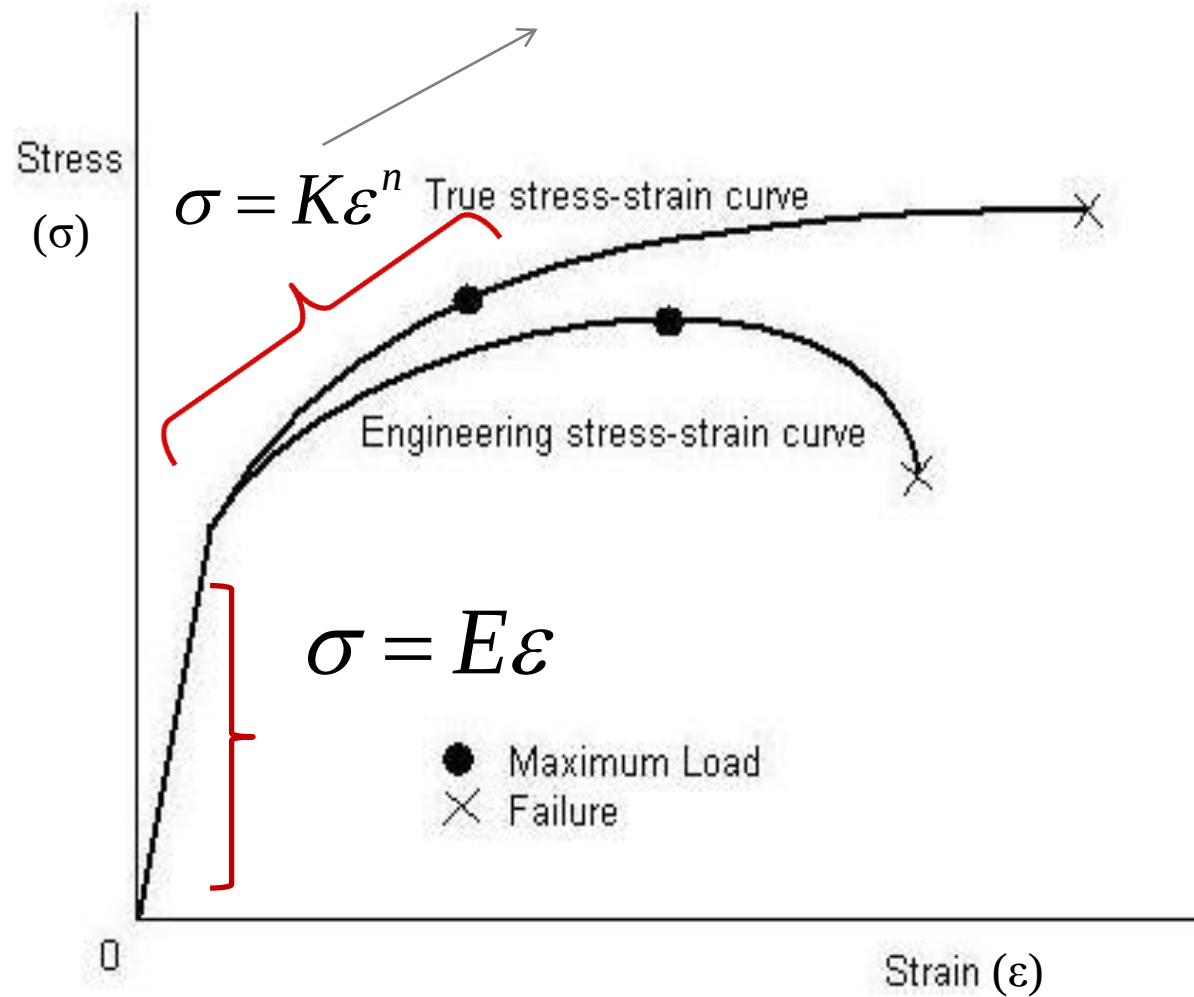
그러나 진변형율의 경우는 과정에 무관하게 변형율이 같다.

$$\varepsilon_{0-1} + \varepsilon_{1-2} + \varepsilon_{2-3} = \ln \frac{55}{50} + \ln \frac{60.5}{55} + \ln \frac{66.5}{60.5} = \ln \frac{66.5}{50} = \varepsilon_{0-3} = 0.286$$



소성변형구간 (항복점 이후)의 해석

항복점 이후는 곡선 방정식 사용



소성변형구간의 해석

항복점(σ_y)과 최대인장응력(σ_{uts}) 사이에서는 가공경화현상이 발생하며, 곡선 방정식은

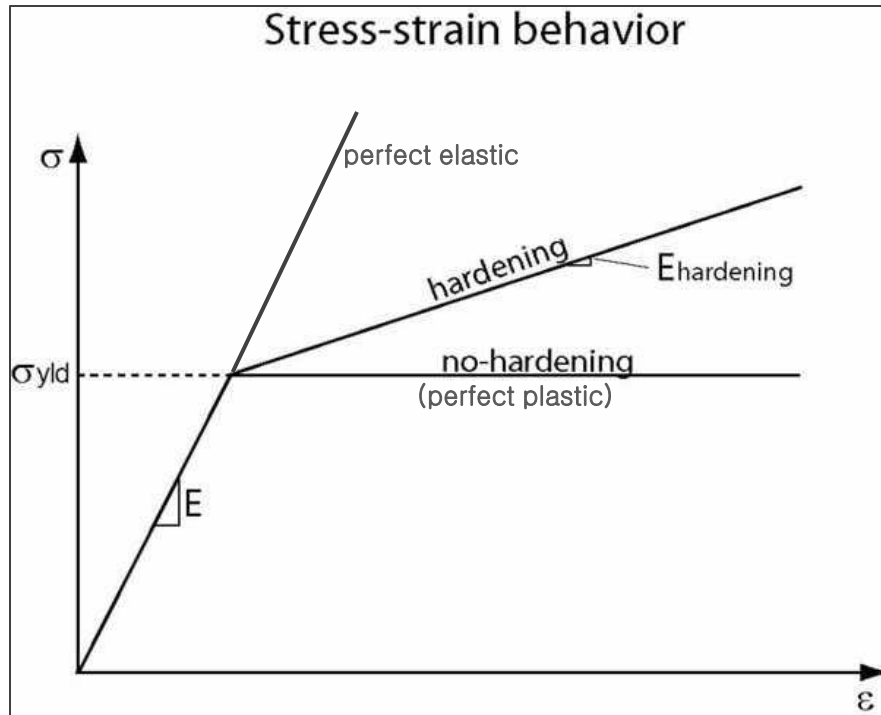
$$\sigma = K\epsilon^n$$

ϵ = 소성변형율(plastic strain) = $\epsilon_{TOTAL} - \epsilon_{elastic}$

K = 강도계수 (strength coefficient) : K = true stress when $\epsilon = 1$, $\sigma = K\epsilon^n = K$

n = 가공경화지수(strain hardening exponent) :

$n = 0$ 이면 perfectly plastic(완전 소성), $n = 1$ 이면 perfectly elastic(완전 탄성).



일반적으로 금속재료인 경우 $n=0.1 \sim 0.5$

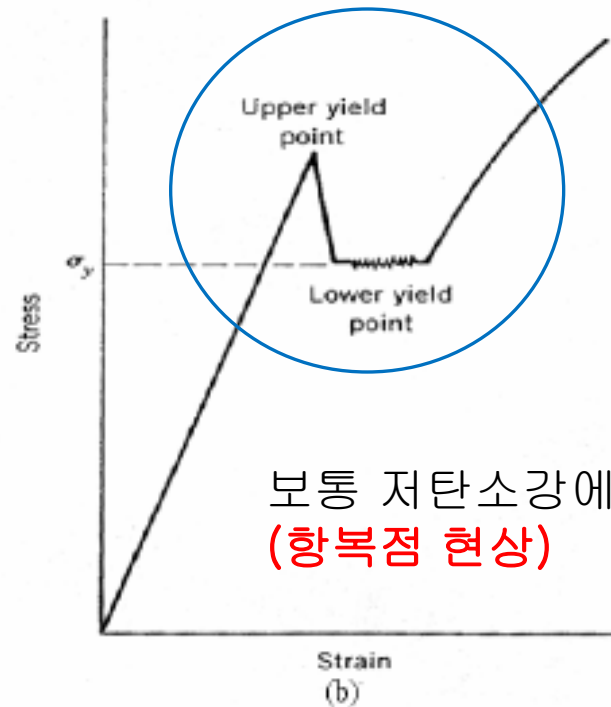
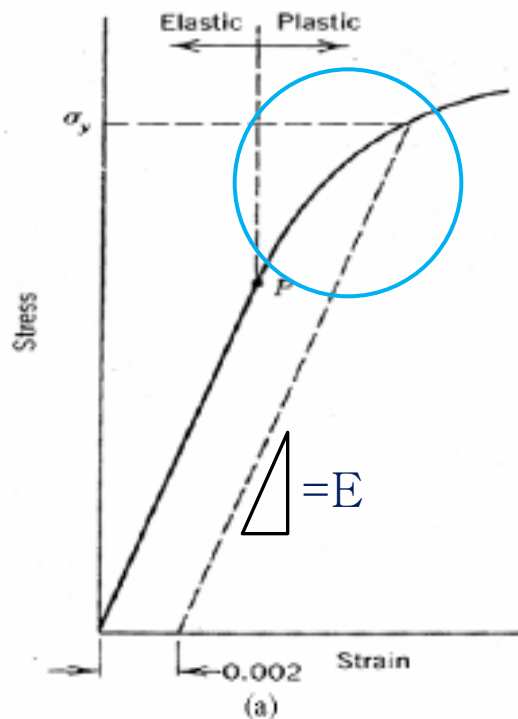
$n = 0.15$ annealed 4340

$n = 0.26$ annealed 0.05 C steel

$n = 0.40$ stainless steel

$n = 0.54$ annealed copper

항복점현상 (Yield phenomena)



보통 저탄소강에서 흔히 보임
(항복점 현상)

Figure 1-13. (a) Typical stress-strain (type II) behavior for a metal showing elastic and plastic deformations, the proportional limit P, and the yield strength σ_y , as determined using the 0.002 strain offset method. (b) Representative stress-strain (type IV) behavior found for some steels demonstrating the yield drop (point) phenomenon.

항복점현상 (Yield-point phenomena)

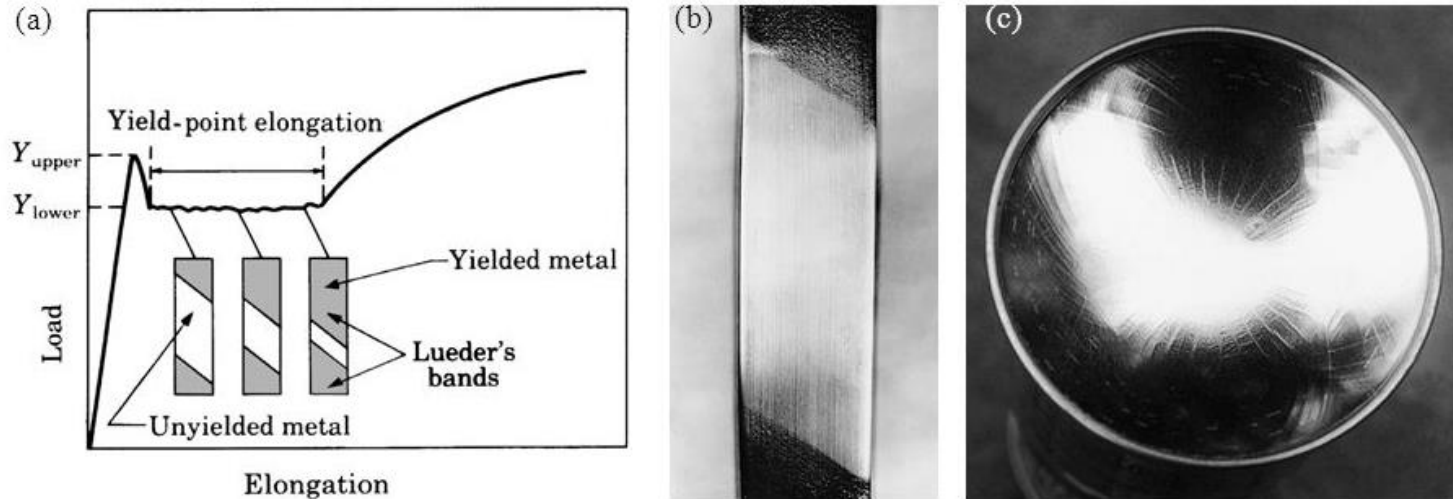


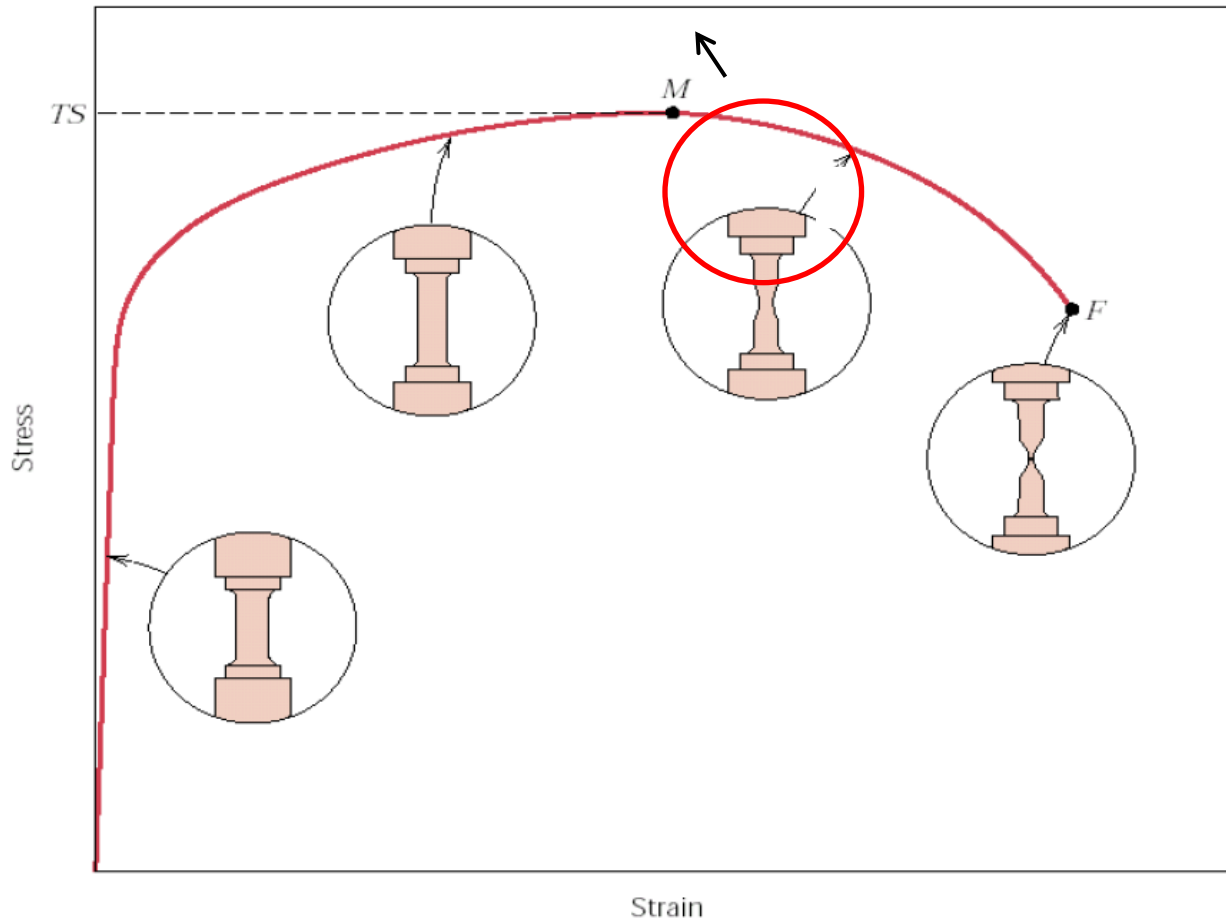
Figure 16.12 (a) Yield-point elongation in a sheet-metal specimen. (b) Lueder's bands in a low-carbon steel sheet. *Source:* Courtesy of Caterpillar Inc. (c) Stretcher strains at the bottom of a steel can for household products.

- 저탄소강을 인장시험할 때 흔히 상부항복점 및 하부항복점이 나타난다.
- 상부 항복점에서는 전위가 C, N 등의 작은 사이즈의 원자들과 상호 작용하여 각각의 변형 띠가 응력 집중부에 형성됨
- 이러한 분위기(Cottrell atmosphere)를 일단 벗어나면 응력은 떨어지게 되고 (하부항복점), 인장이 계속되면, 변형 띠는 인장 축 방향으로 50-55° 방향으로 전파되게 된다.
- ➔ Stretcher Strain, Lüder's bands, Piobert effect

$$S_{\text{upper}} = 1.1 \text{ to } 1.2 \times S_{\text{lower}}$$

- 가공제품의 표면형상에 나쁜 영향 ➡ 개선방법 : 성형전 1-3% 정도의 조질 압연(skin rolling) 시행.

대부분의 금속(연성) 시편의 경우



최대인장응력 (UTS 또는 TS)에서 네킹 (necking) 현상이 발생함

Necking 현상의 해석

Necking은 일반적으로 연성 재료의 인장 시험시 최대인장응력 (UTS)에서 일어남.
즉 @ UTS, $dP = 0$ (변곡점)

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad P = \sigma A, \text{ 전미분을 하면 } dp = \sigma dA + A d\sigma = 0 \quad \therefore \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dA}{A}$$

$$\text{여기에서 } \frac{dA}{A} = -\frac{dl}{l} = -d\epsilon \quad \text{이므로} \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = d\epsilon \quad \text{이고} \quad \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \sigma$$

$$\text{가공경화부분 } \sigma = K\epsilon^n = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \quad \text{이므로} \quad \therefore K\epsilon^n = Kn\epsilon^{n-1} \Rightarrow K\epsilon^n = Kn \frac{\epsilon^n}{\epsilon}$$

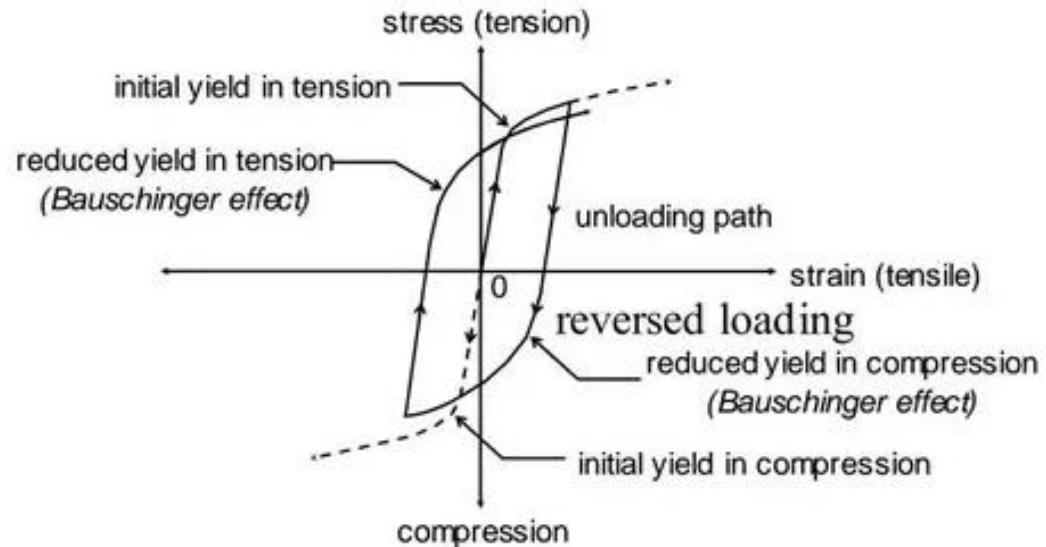
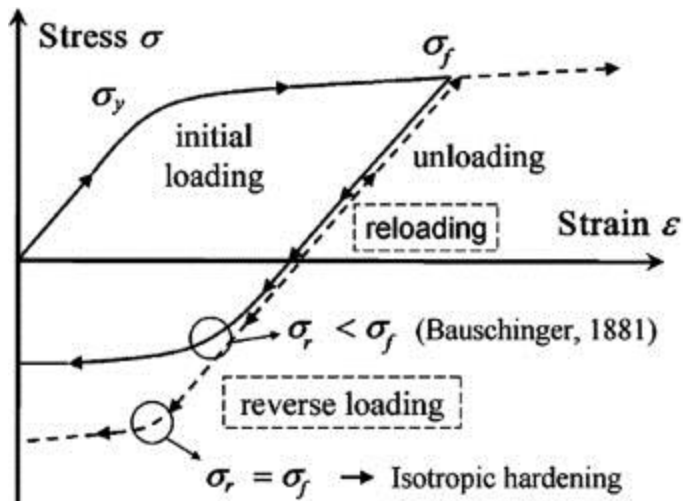
$$\therefore n = \epsilon \quad @ \text{ UTS}$$

Necking 시까지의 변형율을 균일변형(uniform strain)이라 하며 $\epsilon_u = n$

$\therefore$ 가공경화지수가 클수록 연신율이 좋아진다.

바우싱거 효과 (Bauschinger's Effect)

- 인장시험 중 재료가 항복강도 σ_0 를 넘어 소성변형을 할 때, 이 재료에서 하중을 제거하고 변형방향을 바꾸어 압축시험을 실시하면 예상되는 항복응력보다 작은 값의 항복점 σ_b 가 얻어진다.
- 변형방향에 따라 항복점이 작아지는 현상: 바우싱거 효과(Bauschinger's effect).
- 장애물에 집적(pile-up)되어 가공경화를 유발하고 있는 전위들이 변형방향을 바꾸면 오히려 슬립이 용이해질 수 있으므로 가공경화 현상이 감소되어 항복강도가 감소하기 때문.
- 슬립 방향이 거꾸로 되면 전위를 발생하는 source에서 반대부호의 전위가 생성될 수 있고, 이 경우 서로 다른 부호의 전위들은 서로 끌어당겨 상쇄되므로 전위의 밀도가 감소하기 때문.



부피변화율

초기 부피 : $dx \cdot dy \cdot dz$

변형 후 부피 : $dx(1+e_x) \cdot dy(1+e_y) \cdot dz(1+e_z)$

부피 변형율 (volume strain) : $\Delta = \frac{\Delta V}{V}$

$$\Delta = \frac{(1+e_x)(1+e_y)(1+e_z)dx \cdot dy \cdot dz - dx \cdot dy \cdot dz}{dx \cdot dy \cdot dz}$$

$$= (1+e_x)(1+e_y)(1+e_z) - 1$$

$$\therefore (1+e_x)(1+e_y)(1+e_z) = \Delta + 1$$

여기에서 변형 전 후의 부피변화는 없다고 가정.

$$(1+e_x)(1+e_y)(1+e_z) = 1 \quad \text{or} \quad \ln(1+e_x) + \ln(1+e_y) + \ln(1+e_z) = 0$$

$$\therefore \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0, \quad \text{or} \quad \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} = 0$$

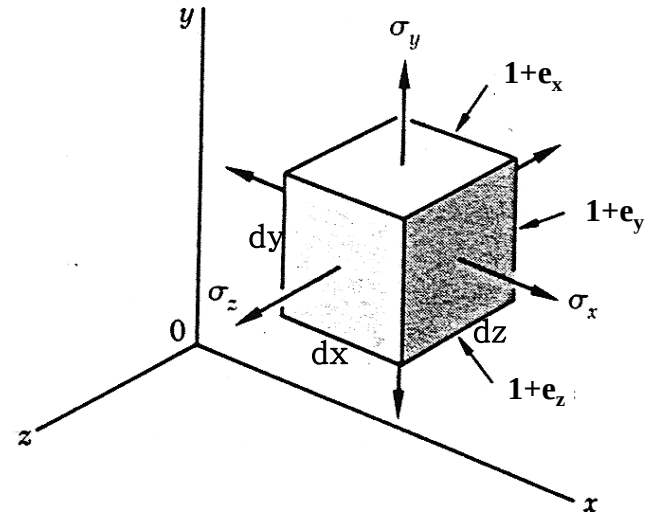
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$+) \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$[\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z] = \Delta = 0 = \frac{1}{E}[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E}[1 - 2\nu][\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z]$$

그러므로, $\Delta = 0$ 이 될 조건은 $\nu = \frac{1}{2}$



항복조건 (Yield Criteria)

- 일축응력(uniaxial stress)의 경우, 부과된 응력이 항복점을 초과 할 때 항복이 일어나며,
- 3차원응력상태의 경우에는, **폰마이시스 항복조건**(Von-Mises Yield Criteria : 전단변형 에너지 이론) 과 **트레스카 항복조건**(Tresca Yield Criteria : 최대전단응력 이론)을 적용하여 판정한다.
 - 응력상태가 복잡할 경우 소성변형을 일으키는 응력을 예측하기 위한 조건
 - 1축 응력의 경우에는 항복점이 항복조건이 된다
 - 항복조건 도출을 위한 등방성 금속재료에 적용되는 가정
 - ✓ 바우칭거 효과(Bauschinger effect) 가 존재하지 않는다.
 - ✓ 소성변형 전후에 부피변화는 없다(Poisson's ratio = 0.5)
 - ✓ 평균 수직응력은 항복에 영향을 주지 않는다.

(1)폰마이시스 항복조건(Von-Mises Yield Criteria)

3-D 응력상태하에서 등방향 응력을 뺀 편차응력이 어떤 한계 값에 이를 때 소성변형이 일어남.

(2) 트레스카 항복조건(Tresca Yield Criteria)

최대 전단응력이 어떤 한계값(전단 항복응력 K)에 이르게 되면 항복이 일어남

(1) 폰마이시스 항복조건(Von-Mises Yield Criteria)

3-D 응력상태하에서 등방향 응력을 뺀 편차응력이 어떤 한계값에 이를 때 소성변형이 일어남

- ◎ 편차응력의 2차 불변량(J_2')가 어떤 특정값(k^2)에 도달하면 항복이 일어난다고 생각.
- ◎ (이유) 실험에 근거하여 등방향응력 자체는 연속체의 소성변형을 일으키지 못하므로 소성변형을 일으키게 하는 것은 복잡한 응력상태에서 등방향 응력을 뺀 부분 즉, 편차응력이라고 보고 편차응력들의 조합이 어떤 한계 값에 이르면 소성변형이 일어난다고 생각하고, 이 편차응력의 조합이 등방체의 경우 축의 선택과는 무관해야 한다는 것을 고려하여 편차응력의 2차불변량이 $f(\sigma'_{ij}) = J_2' = k^2$ 에 이르면 항복이 일어난다고 제안하였다.

평균응력과 편차응력

평균응력 : 3개 수직응력의 평균

$$\sigma_m = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{3}$$

주응력을 $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ 라 할때

$\sigma'_i = \sigma_i - 1/3(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})$ (단, $i = I, II, III$)를 편차응력이라 한다.

삼축시험에서는 축방향응력 σ_I 과 축방향응력 σ_{III} 의 차를 편차응력이라고 함.

편차응력 (σ')

전체 응력에서 평균응력성분을 뺀 응력

$$|\sigma_{ij}| = \begin{vmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma_m) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_{yy} - \sigma_m) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_{zz} - \sigma_m) \end{vmatrix}$$

참고 : 편차 응력계에서의 텐서 요소 관계식

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_{zz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} = \sigma_{ij}\end{aligned}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} = \text{kroncker } \delta, i = j \text{ 이면 } 1, \quad i \neq j \text{ 이면 } 0)$$

$$\sigma'_x = \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

$$\sigma'_y = \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

$$\sigma'_z = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

$$\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0$$

(1) 폰마이시스 항복조건(Von-Mises Yield Criteria)

3-D 응력상태하에서 등방향 응력을 뺀 편차응력이 어떤 한계값에 이를 때 소성변형이 일어남. ($J_2 \geq K^2$)

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_2 = \sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x - \tau_{xy}'^2 - \tau_{yz}'^2 - \tau_{zx}'^2 = J_2$$

$$= \frac{1}{2}[(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z)^2 - (\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2)] - \tau_{xy}'^2 - \tau_{yz}'^2 - \tau_{zx}'^2$$

Since $\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0 \quad \longrightarrow \quad I_2 = J_2 = -\frac{1}{2}(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2) - \tau_{xy}'^2 - \tau_{yz}'^2 - \tau_{zx}'^2$

$$|J_2| = \frac{1}{2}(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2) + \tau_{xy}'^2 + \tau_{yz}'^2 + \tau_{zx}'^2$$

여기서

$$\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 = \frac{1}{3}[(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + (\sigma'_y - \sigma'_z)^2 + (\sigma'_z - \sigma'_x)^2] = \frac{1}{3}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2]$$

$$\ominus \frac{1}{3}[2(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2) - 2(\sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x)]$$

$$(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z)^2 = 0 = [\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2(\sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x)]$$

예)서 $\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 = -2(\sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x)$



$$\therefore J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = K^2$$

※ 주응력축계에서

$$J_2' = \frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2] = K^2$$

※ von Mises는 J_2' 가 k^2 이하에서는 재료가 탄성을 나타내고, k^2 값에 이르게 되면 항복상태가 된다. 가공경화가 일어나지 않는다면 J_2' 는 k^2 을 초과하지 못한다.

$$\text{탄성영역} : J_2' < k^2$$

$$\text{항복점} : J_2' = k^2$$

Von-Mises Criteria는 $J_2 = K^2$ 보다 클 경우에 적용

To evaluate K, consider yielding at uniaxial tension(일축 인장), i.e $\sigma_I = \sigma_0$

$$\sigma_{III} = \sigma_{II} = 0 \quad \therefore J_2 = \frac{1}{6} [\sigma_0^2 + \sigma_0^2] = K^2 \Rightarrow \frac{1}{3} \sigma_0^2 = K^2 \Rightarrow \sigma_0 = \sqrt{3}K$$

$$\text{주응력계: } \sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{일반응력계: } \sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2]^{\frac{1}{2}}$$

예제: Al 7075-T6 (항복응력, σ_{ys}) = 500MPa의 부품이

1) 아래의 이 상태에서 있을 때 항복이 일어나겠는가?

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 30 \\ 0 & 30 & -50 \end{bmatrix}$$



$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(200 - 100)^2 + (100 + 50)^2 + (-50 - 200)^2 + 6(30)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{316.9}{\sqrt{2}} = 224MPa$$

σ_0 가 항복강도 (σ_{ys})보다 크지 않으므로 항복이 일어나지 않는다.

2) 안전율(Safety factor)은 얼마인가?

$$\frac{500MPa}{224MPa} = 2.2$$

(2) 최대전단응력(Tresca) 항복조건

- ◎ 재료의 소성변형은 전단응력과 관계가 있다는 생각에서 시작
- ◎ 최대전단응력이 어떤 한계값(전단항복응력 k)에 이르게 되면 항복이 일어난다.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = k \quad \dots\dots\dots(3-21)$$

여기서 σ_I 은 최대주응력이며, σ_{III} 는 최소주응력이다.

- ◎ 일축인장항복응력 σ_o 와 전단항복응력 k 의 관계

일축인장의 경우 $\sigma_I = \sigma_o$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$, 식(3-21)로 부터

$$k = \sigma_o/2 \quad \dots\dots\dots(3-22)$$

- ◎ Tresca 항복조건은 식(3-22)를 (3-21)식에 대입하면

$$\boxed{\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_o} = 2k \quad \dots\dots\dots(3-23)$$

※ Tresca 항복조건은 최대주응력과 최소주응력만이 고려되고 중간크기의 응력에는 무관하다.

(예제) Al alloy($\sigma_{ys} = 500\text{MPa}$)가 다음의 응력상태 $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 200 & -100 & 0 \\ -100 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$ 에 있을 때 항복여부?

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} = \frac{\sigma_0}{2} \quad \text{즉,} \quad \sigma_x - \sigma_z = \sigma_0$$

$$200 - (-50) = 250\text{MPa}$$

σ_0 가 Al의 항복응력 500MPa 작으므로 항복이 일어나지 않는다.

예제

$\sigma_x = 750\text{MPa}, \sigma_y = 150\text{MPa}, \sigma_z = 0, \tau_{xy} = 150\text{MPa}$ 에서 항복이 일어나는 재료의 압축 항복응력(σ_{ys})은?

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 750 & 150 & 0 \\ 150 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

1) By Von-Mises theory

$$\begin{aligned} \text{우선, 주응력 계산: } \sigma_I, \sigma_{II} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{750 + 150}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{750 - 150}{2}\right)^2 + 150^2} = 785.4\text{MPa}, 114.6\text{MPa} \end{aligned}$$

$$\sigma_{III} = 0$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]^{\frac{1}{2}} = 734.8\text{MPa} = \sigma_{ys}$$

2) By Tresca theory

$$\sigma_0 = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_I - \sigma_{III} = 785.4\text{MPa} - 0\text{MPa} = 785.4\text{MPa} = \sigma_{ys}$$